

Сури́с Роберт Арно́льдович

Академик РАН

доктор физико-математических наук

Заведующий кафедрой физики конденсированного состояния Санкт-Петербургского национального исследовательского академического университета им. Ж.И. Алфёрова РАН

<https://spbau.ru/vyisshee-obrazovanie/kafedryi/kafedra-fiziki-kondensirovannogo-sostoyaniya/zaveduyushhij-kafedroj>

https://ru.wikipedia.org/wiki/Сури́с,_Роберт_Арно́льдович

Вопрос для 8-9 классов:

Как будут вести себя два шарика, деревянный и железный, если поместить их в бесконечное пространство, заполненное водой?

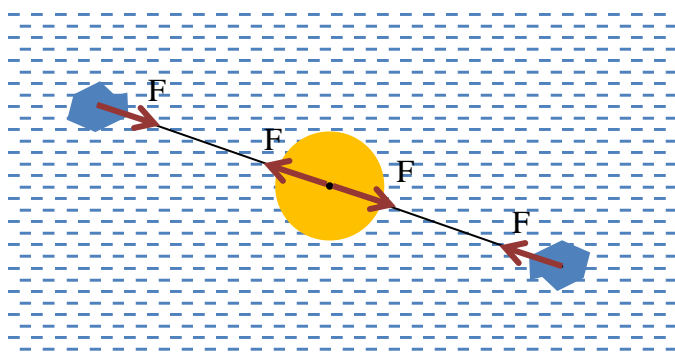


Ответ:

В первую очередь при решении данной задачи обратим внимание, что шарики не находятся в поле силы тяжести Земли, т.е. это не обычная задача на силу Архимеда (где деревянный шарик, плотность которого меньше плотности воды, всплывает, а металлический шарик с большей плотностью тонет).

Таким образом, нужно рассмотреть гипотетическую ситуацию бесконечного пространства, заполненного водой с двумя шариками при отсутствии каких-либо других тел.

Для начала рассмотрим случай одного шара (например, металлического) в бесконечном пространстве с водой. Рассмотрим гравитационное взаимодействие одного из шаров с водой. Вполне очевидно, что поскольку система центрально симметрична (по отношению к центру шара), взаимодействие шара (в соответствии с законом всемирного тяготения) с любым объемом воды будет уравновешено взаимодействием с точно таким же объемом, инверсным относительно центра шара (см. Рисунок 1: по модулю $F_1=F_2$). Будем считать, что вода при этом не сжимается и не перемешивается. Гравитационное поле шарика, по сути, создает силовое поле, которое приводит к уменьшению давления в воде по мере удаления от шарика.



Теперь рассмотрим гравитационное взаимодействие в случае с двумя шариками (Рисунок 2).

Силу гравитационного притяжения двух шаров F_1 рассчитываем по закону всемирного тяготения.

$$F_1 = G \frac{M_{\text{ж}} M_{\text{д}}}{R^2} = G \frac{\rho_{\text{ж}} V_{\text{ж}} \rho_{\text{д}} V_{\text{д}}}{R^2}$$

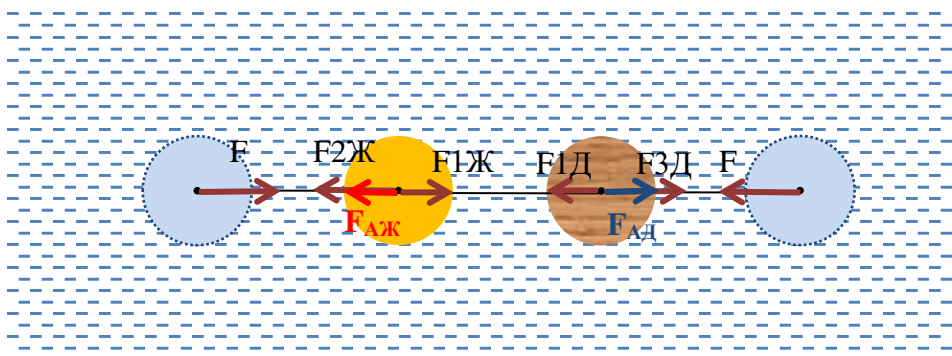
где R – расстояние между центрами шаров, G – гравитационная постоянная, $\rho_{\text{ж}}, \rho_{\text{д}}, V_{\text{ж}}, V_{\text{д}}$ – плотности и объемы шариков, соответственно.

Чтобы учесть нескомпенсированное гравитационное взаимодействие воды можно применить следующий прием: рассматриваем притяжение от зеркально отраженного шарика с плотностью воды. Тогда на металлический шарик будет действовать нескомпенсированная гравитационная сила притяжения F_2 к объему воды, в точности равному деревянному шару и удаленному на такое же расстояние:

$$F_2 = G \frac{M_{\text{ж}} M_{\text{вд}}}{R^2} = G \frac{\rho_{\text{ж}} V_{\text{ж}} \rho_{\text{в}} V_{\text{д}}}{R^2}$$

аналогично на деревянный шарик действует нескомпенсированная сила со стороны воды

$$F_3 = G \frac{M_{\text{д}} M_{\text{вж}}}{R^2} = G \frac{\rho_{\text{д}} V_{\text{д}} \rho_{\text{в}} V_{\text{ж}}}{R^2}$$



Наконец, на каждый шарик будет действовать выталкивающая (по отношению к другому шарик) сила Архимеда. Чтобы точно учесть эту силу, нужно проводить расчеты, выходящие за пределы школьной программы (интегрирование и т.п.), однако в приближении, что расстояние между шариками R намного больше радиусов шариков, можно использовать обычную запись для силы Архимеда:

$$F_{АЖ} = \rho_{В} g_{Д} V_{Ж} = \rho_{В} G \frac{M_{Д}}{R^2} V_{Ж} = G \frac{\rho_{В} \rho_{Д} V_{Д} V_{Ж}}{R^2}$$

здесь $g_{Д}$ – аналог ускорения свободного падения в гравитационном поле деревянного шарика

$$F_{АД} = \rho_{В} g_{Ж} V_{Д} = \rho_{В} G \frac{M_{Ж}}{R^2} V_{Д} = G \frac{\rho_{В} \rho_{Ж} V_{Ж} V_{Д}}{R^2}$$

здесь $g_{Ж}$ – аналог ускорения свободного падения в гравитационном поле железного шарика

Тогда, суммарная сила, действующая на железный шарик будет:

$$\begin{aligned} F_{Ж} &= F_{1Ж} - F_{2Ж} - F_{АЖ} = G \frac{\rho_{Ж} V_{Ж} \rho_{Д} V_{Д}}{R^2} - G \frac{\rho_{Ж} V_{Ж} \rho_{В} V_{Д}}{R^2} - G \frac{\rho_{В} \rho_{Д} V_{Д} V_{Ж}}{R^2} = \\ &= G \frac{V_{Д} V_{Ж}}{R^2} (\rho_{Ж} \rho_{Д} - \rho_{Ж} \rho_{В} - \rho_{В} \rho_{Д}) \end{aligned}$$

Тогда, суммарная сила, действующая на железный шарик будет:

$$\begin{aligned} F_{Д} &= F_{1Д} - F_{3Д} - F_{АД} = G \frac{\rho_{Ж} V_{Ж} \rho_{Д} V_{Д}}{R^2} - G \frac{\rho_{Д} V_{Д} \rho_{В} V_{Ж}}{R^2} - G \frac{\rho_{В} \rho_{Ж} V_{Ж} V_{Д}}{R^2} = \\ &= G \frac{V_{Д} V_{Ж}}{R^2} (\rho_{Ж} \rho_{Д} - \rho_{В} \rho_{Д} - \rho_{Ж} \rho_{В}) \end{aligned}$$

В последних двух выражениях важно правильно учесть направления векторов, чтобы в дальнейшем понять, куда направлены итоговые силы (для этого мы добавили соответствующие индексы). Более грамотно было бы записывать все силы в векторной форме.

Приняв во внимание, что плотность железа 7800 кг/м^3 , плотность воды 1000 кг/м^3 , плотность дерева примерно 500 кг/м^3 (вообще, в диапазоне от 400 до 900 кг/м^3 , хотя для черного дерева – 1160 кг/м^3), получаем:

$$(\rho_{Ж} \rho_{Д} - \rho_{В} \rho_{Д} - \rho_{Ж} \rho_{В}) = 3900000 - 500000 - 7800000 = -4400000 \text{ (кг/м}^3)^2$$

Поскольку знак получился отрицательный, силы будут действовать противоположно направлениям $F_{1Ж}$ и $F_{1Д}$. Т.е., на шарики будут действовать, фактически, отталкивающие силы, направленные в разные стороны вдоль оси, соединяющей центры шаров.

Следовательно, в соответствии со вторым законом Ньютона $F=ma$, шарики будут ускоренно двигаться в противоположные стороны вдоль линии, соединяющей их центры. Важно отметить, что движение это не будет равноускоренным, поскольку будет меняться (увеличиваться) расстояние между шариками R , т.е. ускорение будет уменьшаться, но направление движения никогда не поменяется.

Задача становится сложнее, если в начальный момент времени расстояние между шариками было сравнимо с их радиусами, однако качественную картину взаимодействия это не меняет, лишь изменятся начальные значения сил (ускорений).

Наконец, поскольку в условии ничего не сказано о начальных скоростях шариков, задача еще более усложнится, если начальные скорости шариков были направлены произвольным образом. В этом случае мы получим некий аналог решения астрономической задачи о движении двух тел (законы Кеплера), усложненной наличием среды.

Отметим, что мы не учитываем вязкость воды, которая (при ее учете) также будет влиять на кинематику шариков.