



Глазов Михаил Михайлович

Член-корреспондент РАН, Профессор РАН

доктор физико-математических наук

Ведущий научный сотрудник Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН

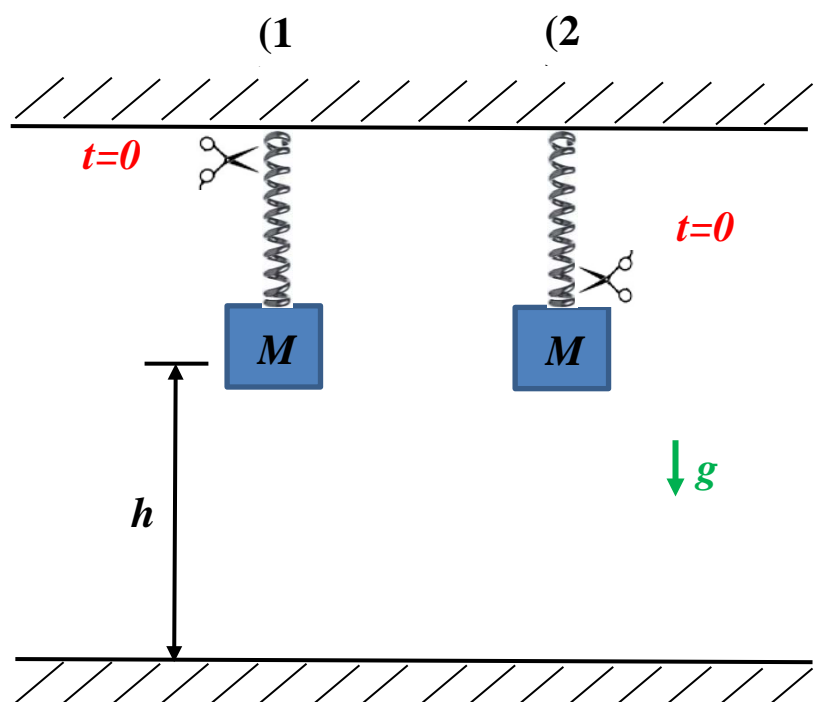
<http://www.school.ioffe.ru/phys/lecturers/глазов-михаил-михайлович>

https://ru.wikipedia.org/wiki/Глазов_Михаил_Михайлович

Вопрос для 10-11 классов:

Имеется два одинаковых груза, масса каждого равна M , подвешенных к потолку на пружинах, см. рис. Высота грузов над землей одинакова и равна h . В начальный момент времени ($t = 0$) пружины перерезают, причем пружину, удерживающую первый груз, перерезают в верхней точке крепления (у потолка), а пружину, удерживающую второй груз - в нижней точке (там, где закреплен груз).

Какой из грузов упадет на землю первым? Почему? Насколько можно замедлить падение груза (и от каких параметров зависит эффект). Сопротивлением воздуха можно пренебречь, также можно считать, что размеры грузов малы по сравнению с длинами пружин и высотой h .



Ответ:

Сначала разберемся с тем, какой из грузов быстрее достигнет земли. Ясно, что на первый груз при $t = 0$ (сразу после разрезания пружины) действует две силы: сила тяжести Mg , направленная вниз, и сила натяжения пружины T , направленная вверх. В начальный момент $T = Mg$ (тело к пружине прикреплено, а нижняя точка пружины еще не успела узнать о том, что наверху пружину отцепили, дальше мы обсудим, насколько быстро эта информация дойдет сверху пружины до низу). На второй груз после разрезания пружины в нижней точке будет действовать лишь сила тяжести вниз. Это означает, что ускорение второго груза будет больше, и он приземлится раньше, чем первый.

Теперь рассмотрим более подробно падение грузов. Что касается груза # 2, то тут все ясно: груз будет падать время

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Ситуация с первым грузом сложнее. Проще всего разобраться с движением центра масс системы “груз # 1 + пружина”. Пусть масса пружины m , ее длина l . Центр масс системы свободно падает, причем с высоты $h + [m/2(m+M)]l$. Для грубой оценки можно считать, что время падения груза и время падения центра масс одинаково (на самом деле, груз ударится о землю раньше). Поэтому

$$t_1 = \sqrt{\frac{2}{g} \left(h + \frac{m}{2(M+m)} l \right)}.$$

Из полученной формулы получается, что для того, чтобы максимально замедлить падение груза, требуется брать как можно более длинную и тяжелую пружину.

Проанализируем более подробно динамику первого груза. Для этого запишем уравнения движения (ось z направлена вниз) в простейшей модели, характеризуя пружину положением ее центра масс z , а груз – положением его центра Z (штрих обозначает дифференцирование по времени):

$$\begin{cases} mz'' = mg + T(z - Z) \\ MZ'' = Mg - T(z - Z). \end{cases}$$

Отметим, что сила натяжения пружины зависит от того, насколько она растянута, т.е. от $z - Z$. Сумма этих уравнение описывает свободное падение центра масс системы, а относительное движение груза и центра пружины описывается относительной координатой $\zeta = z - Z$:

$$\zeta'' = \frac{T(\zeta)}{\mu}.$$

Здесь $\mu = mM/(m + M)$ – приведенная масса. Если принять, что сила натяжения пружины подчиняется закону Гука $T \propto \zeta$, и воспользоваться условием того, что при $\zeta = l/2$ сила натяжения уравновешивала силу тяжести, действующую на груз, то

$$T(\zeta) = \frac{2Mg}{l} \zeta.$$

Таким образом, для относительного движения получилось уравнение гармонического осциллятора:

$$\mu \zeta'' = \frac{2Mg}{l} \zeta,$$

период осцилляций которого есть

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\mu l}{2Mg}}$$

За время порядка четверти периода пружина сожмется, а информация о том, что ее верхний конец обрезали дойдет до груза. Можно рассматривать эту ситуацию иначе: после разрезания пружины сверху по ней побежит звуковая волна, которая дойдя до груза существенно изменит силу натяжения T и “сообщит” о том, что пружина была отцеплена. Отметим, что при $t \geq t_0/4$ использовать закон Гука необоснованно, так как уже нельзя считать, что витки пружины бесконечно тонкие. По сути, произойдет удар груза о сжатую пружину, физика такого удара требует отдельного исследования.